Всероссийская заочная многопредметная школа

Е. Е. Пушкарь

Пособие для учащихся ВЗМШ

Первый курс

Москва 2015

Пушкарь Екатерина Евгеньевна

Пособие для учащихся ВЗМШ. Первый курс. – М.: 2015. – 36 стр.

Пособие предназначено для учащихся 1 курса математического отделения (7 класс) ВЗМШ. Оно содержит краткий теоретический материал, а также разобранные примеры и задачи по различным темам, входящим в программу курса. В конце каждого параграфа приведено контрольное задание по данной теме.

Компьютерная верстка Е. Е. Пушкарь.

Оглавление

Итак, начинается обучение на первом курсе математического отделения нашей школы. Для многих из вас это второй год обучения, чему мы очень рады – ведь если вы с нами, значит, вам нравится математика и нравится учиться!

Задание 1. Здравствуйте!

Для разминки начнем с задания без темы. Просто думаем и решаем!

Не забудьте аккуратно записать решение задачи, так чтобы проверяющий мог понять вашу мысль. Помните, что ответ без решения зачтен не будет.

Обязательные задачи

1.1. Ребята принесли из леса по полной корзинке грибов. Всего было собрано 289 грибов, причём в каждой корзинке грибов оказалось одинаковое количество. Сколько было ребят?

1.2. На острове проживают 1234 жителя, каждый из которых либо рыцарь (который всегда говорит правду), либо лжец (который всегда лжет). Однажды все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: «Он – рыцарь!», либо «Он – лжец!». Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?

1.3. Можно ли начертить два треугольника так, чтобы граница образовавшейся фигуры была девятиугольником?

1.4. Из четырех неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$ и $x > 5$ два истинны и два ложны. Найдите значение x, если известно, что оно целое.

1.5. На доске записаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать разность большего и меньшего числа. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

1.6. Коля и Вася за ноябрь получили по 15 оценок: тройки, четвёрки и пятёрки. При этом Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, а троек столько же, сколько Вася пятёрок. Оказалось, что средний балл за ноябрь у мальчиков одинаковый. Сколько троек получил Коля в ноябре?

Дополнительные задачи

1.7. На столе в ряд лежат четыре монеты. Среди них обязательно есть как настоящие, так и фальшивые (которые легче настоящих, но выглядят как настоящие). Известно, что любая настоящая монета лежит левее любой фальшивой. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь определить тип каждой монеты, лежащей на столе?

1.8. Десять друзей послали друг другу открытки: каждый послал ровно пяти друзьям, каждому – по одной открытке. Всегда ли найдутся двое, которые послали открытки друг другу?

1.9. Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.

Срок отправки задания: 20 октября.

Задание 2. Принцип Дирихле

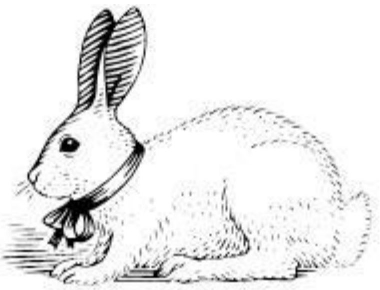
Как ни удивительно, это занятие посвящено кроликам.

Решим странную на первый взгляд задачу:

можно ли рассадить 5 кроликов в 4 клетки так, чтобы в каждой клетке было не более одного кролика?

Попробуем рассуждать логически.

Предположим, что нам это удалось. Тогда, если в каждой клетке не более одного кролика, то в 4 клетках не более четырех кроликов, а



у нас их 5. Значит, это сделать невозможно.

Более общий вывод из этой задачи можно сформулировать в следующем виде:

Если у нас имеется сколько-то клеток, а кроликов на одного больше, то после рассаживания кроликов по клеткам найдется клетка, где сидят по крайней мере два кролика.

Это и есть принцип Дирихле. Его можно записать и иначе, на «математическом» языке:

После рассаживания в n клетках $n + 1$ кролика найдется клетка, где сидят, по крайней мере, два кролика.

(Мы попросту заменили слово «сколько-то» некоторым числом n.)

Задачу про кроликов мы решили методом от противного, но в дальнейшем, при решении более сложных задач, можно пользоваться самим принципом Дирихле, не проводя полного доказательства; главное понять, что есть «клетки», а что – «кролики».

Например, решим такую задачу:

Задача. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них обязательно найдутся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

Решение. Здесь ученики — это «кролики», а буквы русского алфавита — «клетки». Поскольку «кроликов» больше, чем «клеток», то в какой-то «клетке» будет сидеть больше одного «кролика», то есть найдутся хотя бы два ученика, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

Попробуем обобщить принцип Дирихле.

Рассмотрим две задачи.

1) Можно ли рассадить 9 кроликов в 4 клетки так, чтобы в каждой клетке было не более двух кроликов?

Понятно, что этого сделать нельзя: по крайней мере в одной клетке будут сидеть не меньше трех кроликов. Отметим, что их может быть и больше трех (если, например, посадить в 3 клетки по одному кролику, а в четвертую всех остальных).

2) Можно ли рассадить в 20 клеток 101 кролика так, чтобы в каждой клетке было не более 5 кроликов?

Конечно нельзя. В какой-то клетке будет не меньше шести кроликов.

Какой можно сделать вывод?

Обобщение принципа Дирихле. *В данные n клеток мы разместили $nk + 1$ кролика. Тогда найдется клетка, где сидит не менее $k + 1$ кролика.*

Или, что то же самое:

если среднее арифметическое количества кроликов в n клетках больше k, то найдется клетка, в которой сидят не меньше k+1 кроликов.

Рассмотрим еще один пример.

Задача. В классе учится 29 человек. Сережа допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделал большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учеников сделали одинаковое количество ошибок.

Решение. Пусть «клетки» – это количества ошибок, которые могли сделать школьники: 0, 1, 2, …, 13. Их 14. За «кроликов» примем учеников, писавших диктант. Их $29 = 14 \cdot 2 + 1$. Тогда по принципу Дирихле (а точнее, по его обобщению) найдется «клетка», в которой сидят не меньше трёх «кроликов», а это и означает, что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое количество ошибок.

Сейчас мы решим задачу, с помощью которой мы сможем сформулировать еще один принцип, аналогичный принципу Дирихле.

Задача. Четыре подружки купили и съели 5 эклеров. Докажите, что какие-то две из них съели одинаковое количество пирожных.

Решение. Предположим, все девочки съели по разному числу эклеров. Тогда они съели не меньше 0 + 1 + 2 + 3 пирожных. Действительно, если, например, каждая девочка съела хотя бы одно пирожное, то они съели бы как минимум 1 + 2 + 3 + 4 эклеров, а эта сумма явно больше, чем 0 + 1 + 2 + 3. Однако 0 + 1 + 2 + 3 = 6, а пирожных было всего 5, значит, наше предположение неверно, то есть какие-то две девочки съели одинаковое число пирожных.

А вот тот принцип, о котором мы говорили выше.

Если мы размещаем не более $\frac{n(n-1)}{2}-1$ *кролика в n клеток, то найдутся по крайней мере две клетки, где сидит по одинаковому числу кроликов.*

Этот принцип иногда называют принципом недостаточности. Его доказательство очень похоже на решение задачи про подружек-сладкоежек.

Доказательство. Допустим, что в каждой из n клеток сидят по разному числу кроликов. Это означает, что всего во всех этих клетках находятся не менее $0 + 1 + 2 + ... + (n - 1)$ кроликов. Найдем эту сумму.

Запишем её дважды следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 \\ n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \dots & + & 0 \end{array}$$

Если сложить пары чисел, расположенных друг над другом, то каждая такая сумма будет равна $n-1$, а всего будет n таких пар. Значит, удвоенная сумма чисел от 0 до $n-1$ равна $(n-1)n$. Осталось разделить это число на 2, чтобы найти искомую сумму: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Мы получили противоречие с тем, что кроликов по условию не больше $\frac{n(n-1)}{2}-1$.

В задаче про подружек и эклеры – девочки – это «клетки», а эклеры – это «кролики».

Решим еще одну задачу на использование этого принципа.

Задача. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

Решение. Будем считать, что «клетки» – это корзинки мальчиков ($n = 15$), а «кролики» – орехи, и применим принцип недостаточности (в данном случае $\frac{n(n-1)}{2}-1=\frac{15\cdot 14}{2}-1=104$). Мы получаем, что найдутся две «клетки», где находится по равному числу «кроликов». А это и означает, что найдутся два мальчика, собравших равное число орехов.

Вот другое решение этой задачи (от противного). Оно повторяет рассуждения доказательства принципа недостаточности для данного случая.

Решение. Предположим, все мальчики собрали по разному числу орехов. Тогда всего они собрали не меньше $0+1+2+...+14$ орехов. Найдем эту сумму. Она равна

$$(0+14)+(1+13)+(2+12)+(3+11)+(4+10)+$$
$$+(5+9)+(6+8)+7=14\cdot 7+7=15\cdot 7=105.$$

То есть мальчики собрали как минимум 105 орехов. А по условию орехов всего 100, значит наше предположение неверно, и какие-то два мальчика собрали одинаковое число орехов.

Мы познакомились с принципом Дирихле и его обобщением, а также принципом недостаточности. Эти утверждения очень часто используются в решениях задач. Основная сложность в решении такого типа задач: понять, что взять в качестве «кроликов» и «клеток», но иногда бывает сложно и выбрать метод «рассаживания» «кроликов» по «клеткам».

Для лучшего понимания темы посмотрите главу «Подсчет узких мест» из книжки «Принцип узких мест», которую мы вам прислали.

Также хорошие задачи на эту тему есть в книжке «Математический кружок» А.В.Спивака.

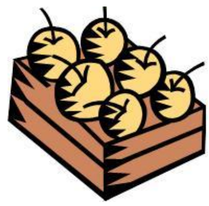
Переходим к решению «контрольных» задач.

Обязательные задачи

2.1. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

2.2. В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше 4 учеников этого класса?

2.3. У коллекционера 25 медных монет (это монеты достоинством 1 коп., 2 коп., 3 коп. и 5 коп.). Докажите, что у него найдётся 7 монет одинакового достоинства.



2.4. В 500 ящиках лежат яблоки, в каждом не более 240 штук. Докажите, что найдутся 3 ящика, в которых яблок поровну.

2.5. Семеро козлят решили научиться стрелять. Через некоторое время в мишени оказалось 24 дырки. Могло ли так случиться, что все козлята попали в мишень разное число раз?

2.6. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа $-1, 0, 1$. Рассмотрим восемь сумм: сумма трех чисел в каждой строчке, каждом столбце и по двум главным диагоналям. Докажите, что среди них найдутся хотя бы две одинаковые.

2.7. В ковре размером 4×4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1×1, не содержащий внутри дырок?

Дополнительные задачи

2.8. В районе 15 школ. Докажите, что как бы ни распределяли между ними 90 компьютеров, обязательно найдутся две школы, получившие одинаковое число компьютеров (возможно, ни одного).

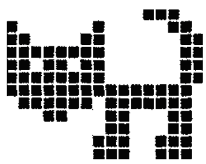
2.9. В ящике 35 яблок трех сортов: анис, антоновка и славянка. В темноте мальчики выбирают яблоки. Какое наименьшее число яблок надо взять, чтобы среди них наверняка оказалось не меньше 4 яблок одного сорта?

2.10. Докажите, что среди любых пяти человек есть двое с одинаковым количеством знакомых среди этих пяти человек.

Срок отправки задания: 10 ноября.

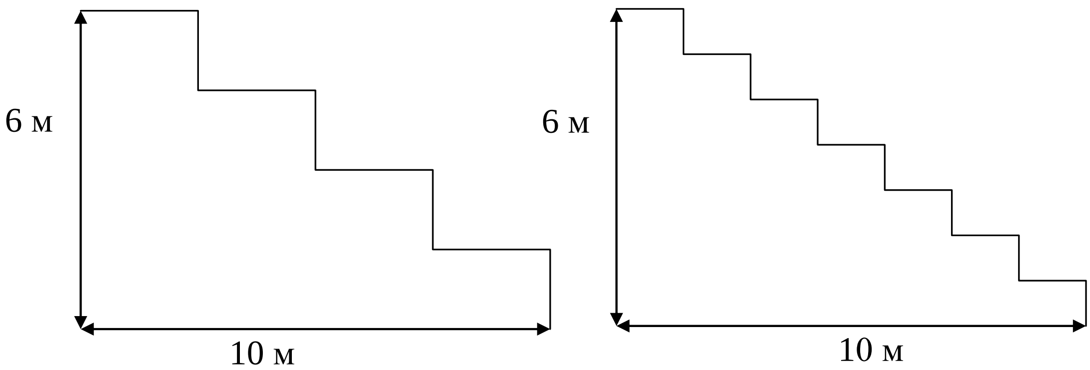
Задание 3. Клетчатые задачи

В олимпиадах часто встречаются «клетчатые» задачи. Это занятие как раз и посвящено некоторым из них. Оно содержит задания на разные темы, но большинство задач связано общей темой.



Обязательные задачи

3.1. Для какой лестницы понадобится более длинная ковровая дорожка?



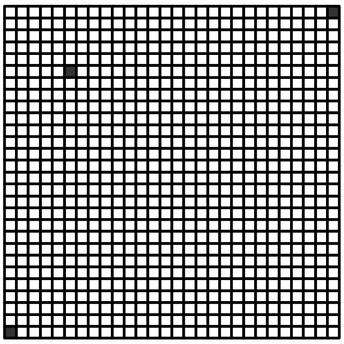
3.2. Разрежьте квадрат 5×5 на пять различных фигурок из пяти клеток каждая.

3.3. Квадрат 5×5 покрывают полосками 1×2 так, что каждая клетка полоски покрывает клетку квадрата. Можно ли положить несколько полосок так, чтобы каждая клетка квадрата была накрыта ровно 5 раз?

3.4. Сколькими способами можно поставить четыре буквы: А, Б, В, Г в квадрате 4×4 так, чтобы в каждой горизонтали и каждой вертикали стояла одна из букв?

3.5. Муха-робот должна проползти из нижнего левого угла квадратной доски в правый верхний, побывав по пути в отмеченной на диагонали клетке (см. рис.). Докажите, что количество способов, которым она может это сделать – квадрат некоторого целого числа.

(За каждый ход Муха-робот ползет либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх.)



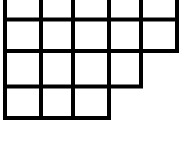
3.6. Муха находится в правой нижней клетке квадратной сетки 13×13. Каждую секунду она переползает на одну из соседних по стороне клеток. Может ли она оказаться в центральной клетке через а) 11 секунд? б) 12 секунд? в) 13 секунд?

3.7. На доске 14×20 в левом нижнем углу стоит конь. Может ли он добраться до правого верхнего угла не более чем за 10 ходов?

Дополнительные задачи

3.8. Секретный объект представляет собой квадрат 8×8, разбитый коридорами на единичные квадратики. На каждом из 81 перекрестков находится переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность всех коридоров длины 1, сходящихся на этом перекрестке. Вначале весь объект затемнен. Сторож находится в углу объекта и хочет, двигаясь только по освещенным коридорам, перейти в противоположный угол и снова затемнить объект. Может ли он это сделать?

3.9. Вырежьте из фигуры, изображенной на рисунке, одну клетку и разрежьте оставшуюся фигуру на четыре равные части.



3.10. В трех клетках сидят обезьянки. В первой клетке – на 99 обезьянок меньше, чем в двух других вместе, во второй – на 19 меньше, чем в первой и третьей вместе. Сколько обезьянок сидит в третьей клетке?

Срок отправки задания: 30 ноября.

Задание 4. Деление с остатком

Со многими из вас в прошлом учебном году мы уже разбирались с тем, как понять, делится ли одно число на другое, и как это можно использовать. Но ведь не всегда числа делятся друг на друга нацело. Иногда (да что там, часто!) при делении целых чисел друг на друга образуется *остаток*. Математики для деления с остатком придумали страшно звучащую теорему.

Теорема о делении с остатком. Если a и b – целые числа, причем $b > 0$, то существуют единственные целые числа q и r такие, что $a = bq + r$, $0 \le r < b$.

Число q в последнем равенстве называется *неполным частным* при делении a на b, а число r – остатком от деления a на b. Очевидно, что при $r = 0$ понятия «неполное частное» и «частное» совпадают.

Пример. Пусть $b = 12$. Разделим числа 110, – 53, 156 на 12 с остатком:

$110 = 12 \cdot 9 + 2,\ 0 \le 2 < 12;$

$-53 = 12 \cdot (-5) + 7,\ 0 \le 7 < 12;$

$156 = 12 \cdot 13 + 0,\ 0 \le 0 < 12.$

Обратите особое внимание на то, как делятся с остатком отрицательные числа. Остаток не бывает отрицательным числом!

Хотим поделиться с вами некоторыми интересными свойствами остатков.

Свойство 1. Остаток суммы двух чисел при делении на третье число, равен остатку от деления суммы остатков на это число.

Запутанно звучит. Давайте попробуем разобраться. Возьмём какие-нибудь два числа. Например, 37 и 72. Пусть нам требуется узнать, чему равен остаток при делении числа 37 + 72 на 35. Очень просто: число 37 при делении на 35 даёт остаток 2, как и число 72. Значит, их сумма даст в остатке 2 + 2 = 4. Давайте проверим, а заодно поймём, почему так получается.

$37 = 1 \cdot 35 + 2;$

$72 = 2 \cdot 35 + 2,$

$37 + 45 = 1 \cdot 35 + 2 + 2 \cdot 35 + 2 = 1 \cdot 35 + 2 \cdot 35 + 2 + 2 = 3 \cdot 35 + 4.$

Всё понятно.

Аналогичное свойство есть и у произведения чисел. Давайте сразу разберём это свойство на примере.

Задача. Найти остаток от деления числа 380 на 7.

Можно, конечно, выполнить деление и, повычисляв вдоволь, найти, что $380 = 54 \cdot 7 + 2$. А можно воспользоваться тем, что $380 = 38 \cdot 10$, при этом, очевидно, 38 при делении на 7 даёт остаток 3, и 10 при делении на 7 даёт остаток 3. Значит, остаток от деления на 7 у числа 380 будет такой же, как у числа $3 \cdot 3 = 9$, то есть этот остаток равен 2. Довольно удобно, не правда ли? Попробуйте провести вычисления и понять, почему это работает.

А теперь – задачки!

Обязательные задачи

4.1. Найдите остаток и неполное частное от деления:

а) 2012 на 57;

б) – 200 на 43;

в) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1$ на 5;

г) 111 111 111 на 111;

д) 11 111 111 на 111.

4.2. Какое максимальное количество воскресений может быть в году?

4.3. Над африканской деревней сгустились тучи и ровно в полдень полил дождь. После 3 суток непрерывного дождя племя спросило колдуна, когда все это кончится. Тот сказал: «Ровно через 300 часов после начала дождя тучи развеются и выглянет солнце». Заслуживает ли колдун доверия?

4.4. Нечетное число при делении на 5 даёт в остатке 4. Найдите его последнюю цифру.

4.5. Может ли число при делении на 8 давать остаток 2, а при делении на 6 остаток 3?

4.6. В некотором месяце три воскресенья пришлись на чётные числа. Какой день недели был 20-го числа этого месяца?

Дополнительные задачи

4.7. Из полного восьмилитрового ведра отлейте 4 литра с помощью пустых трёхлитровой банки и пятилитрового бидона. (Никаких сосудов, кроме данных трёх нет. На землю ничего выплёскивать нельзя, так что в конце концов должно оказаться 4 литра в восьмилитровом сосуде и 4 — в пятилитровом.)

4.8. Когда до полного числа десятков не хватало 2 яиц, их пересчитали дюжинами. Осталось 8 яиц. Сколько могло быть яиц, если их было больше 300, но меньше 400? Найдите все возможные ответы.

4.9. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, фиалка и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днём, поливая цветы, она меняет местами тот, что в центре с тем, что стоит слева. В каком порядке цветы будут стоять через 365 дней в следующую новогоднюю ночь?

Срок отправки задания: 20 декабря.

Задание 5. Инварианты

Многие задачи этого занятия будут иметь похожие условия. В них описываются некоторые действия (операции), совершаемые над каким-то объектом. Требуется доказать, что чего-то этими операциями добиться нельзя. Решение состоит в отыскании некоторого свойства, называемого *инвариантом*, которое сохраняется при операциях, но отсутствует в требуемом состоянии.

Давайте проведём опыт.

Напишите на листочке 11 чисел – 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполните такую операцию: зачеркните два любых числа и, если они были одинаковы, допишите один 0, а если разные – единицу.

Если вы все сделали правильно, то в итоге получилась единица. Единица получится всегда, как бы вы ни зачеркивали числа! Почему же так выходит?

Давайте посмотрим на сумму всех чисел. Исходно сумма чисел равна 5, она нечётна. Посмотрим, меняется ли ее чётность при проведении этих операций.

1) Если вы зачеркнули два ноля (и один ноль дописали), то сумма осталась прежней – нечётной.

2) Если были зачеркнуты две единицы (и один ноль дописали), то сумма чисел уменьшится на 2 и останется нечётной.

3) Если вы зачеркнули один ноль и одну единицу (и единицу дописали), то сумма чисел опять же не изменится и останется нечётной.

Таким образом, сумма чисел всегда остается нечётным числом. Это и есть инвариант в этой задаче. Поняв это, можно сделать вывод, что последним числом будет 1, а не 0, так как 1 – нечётное число.

Решим ещё пару задач.

Задача. Серёжа разорвал листок бумаги на десять кусков, затем некоторые из этих кусков снова разорвал на 10 кусков и так далее. Могло ли таким образом получиться 2015 клочков бумаги?

Решение. При разрывании листа бумаги на 10 частей общее число частей увеличится на 9 (был 1, стало 10). Поэтому после первого разрывания будет 10 кусочков, потом 19, потом 28 и так далее. В любой момент число кусочков равно $1 + 9n$, то есть даёт остаток 1 при делении на 9. Число 2015 при делении на 9 даёт остаток 8, значит, 2015 кусочков получиться не может.

Задача. На доске написано число 1. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через какое-то время на доске появиться число 123456?

Решение. Рассмотрим начало получающейся последовательности: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, ... Есть ли тут какая-то закономерность?

На первый взгляд кажется, что её нет. Но надо понять, какие закономерности мы должны искать? С чем они связаны? Верно, они должны быть связаны со свойством числа 123456. Какими свойствами оно обладает? Оно чётное. Но в нашей последовательности есть как чётные, так и нечётные числа. Число 123456 делится на 3. Проверим, есть ли в нашей последовательности числа, кратные трём. Кажется, нет, хотя мы рассмотрели не очень много чисел.

Попробуем выдвинуть предположение, что чисел, делящихся на 3, в нашей последовательности не будет. Как же это доказать?

Рассмотрим остатки от деления на 3 чисел этой последовательности: 1, 2, 1, 2, 1, 2, ... О, остатки чередуются! Но как доказать, что они будут чередоваться и далее?

А это уже несложно. Покажем, что число a и сумма его цифр будут иметь одинаковые остатки при делении на 3. Пусть

$$a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0.$$

Откуда взялась такая страшная формула? Давайте посмотрим на примере. Вот, например, число 65381. Как оно получилось? Это 60000 + 5000 + 300 + 80 +1. Или $6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 1$. Именно это мы и сделали с числом a, состоящим из $n + 1$ цифры a_n, a_{n-1}, …, a_0 (такое число еще записывается с чертой сверху: $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}$).

Разность между числом a и суммой его цифр равна

$$a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + ... + a_1(10 - 1).$$

Понятно, что каждое слагаемое здесь делится на 3, а это и означает, что число a и сумма его цифр при делении на 3 дают одинаковые остатки (иначе разность между числом и суммой его цифр не делилась бы на 3).

А это означает, что если число a даёт при делении на 3 остаток 1, то и сумма его цифр даёт при делении на 3 такой же остаток, а следующим членом нашей последовательности будет число, которое при делении на 3 даёт в остатке 2.

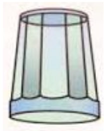
Если остаток числа a при делении на 3 равен 2, то по аналогичным соображениям следующим числом в последовательности будет число, дающее при делении на 3 тот же остаток, что даёт 2 + 2, то есть 1. Значит, в нашей последовательности числа, делящегося на 3, не будет!

В дальнейшей работе над этой темой поможет глава «Несвобода в целом» книжки «Принцип узких мест». Посмотрите, как решены задачи в этой главе (лучше сначала попытаться решить их самостоятельно).

Для решения задач этого задания вам понадобится такой же метод: найти свойство, которое не меняется при описанных в условии операциях. Будьте внимательны, среди задач могут быть и ловушки!

Обязательные задачи

5.1. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. За один ход можно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько ходов все стаканы поставить правильно?



5.2. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. За один ход разрешается стереть два числа, а вместо них написать их сумму или разность. Через 4 хода останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

5.3. В каждой клетке таблицы 3×3 стоит число 0. Разрешается за один ход прибавить 1 к числам в двух ячейках таблицы. Можно ли получить таблицу, состоящую только из пятерок?

5.4. Даны

а) пять чисел: 1, 2, 3, 4, 5;

б) шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Разрешается к любым двум из них прибавлять по 1. Можно ли, проделав это несколько раз, сделать эти числа равными?

5.5. 100 фишек выставлено в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

5.6. В некотором государстве было 7 банков. По закону этого государства открыть банк можно только путём деления уже существующего банка на 3 новых. Через некоторое время министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 2016 банков, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?

Дополнительные задачи

5.7. С набором из пяти чисел, каждое из которых равно 1 или –1, разрешено производить следующую операцию: менять знаки у каких-нибудь двух чисел. Можно ли с помощью нескольких таких операций из набора $\{1, -1, -1, 1, 1\}$ получить набор $\{-1, 1, 1, 1, 1\}$?

5.8. В таблице 3×3 чёрным цветом закрашена одна угловая клетка. Все остальные клетки покрашены белым цветом. Докажите, что с помощью перекрашивания строк или столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. (Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.)

5.9. У Змея Горыныча 2015 голов. Богатырь может срубить одним ударом 33, 21, 19 или 1 голову, но при этом вырастают 48, 0, 16, 349 голов соответственно. Сможет ли богатырь победить Змея?

Срок отправки задания: 6 января.

Задание 6. Раскраски

Некоторые логические задачи удобно решать при помощи метода раскраски. Давайте решим такую задачу.

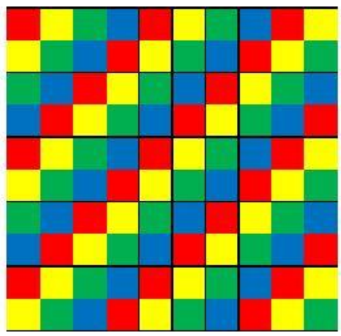
Задача. Может ли конь пройти с поля $a1$ до поля $h8$ шахматной доски 8×8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?[*]

Решение. Заметим, что в условии задачи есть подсказка. Речь идёт о шахматной доске, клетки которой раскрашены в шахматном порядке.

С каждым ходом коня цвет клетки, на которой он стоит, меняется: с белой клетки конь может пойти только на чёрную, а с чёрной – только на белую. Значит, цвет клеток чередуется каждый ход, любой нечётный ход будет с чёрной клетки на белую, а чётный – с белой на чёрную.

Чтобы обойти конём всё поле, побывав на каждой клетке ровно один раз, надо сделать 63 хода. Значит, после 63-го хода (нечётного!), конь окажется на белой клетке. Но поле $h8$ чёрное, значит, конь не может пройти с поля $a1$ до поля $h8$ шахматной доски 8×8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз.

Не во всех задачах раскраска уже дана в условии. Часто её бывает нужно придумать. Как, например, в следующей задаче:



Задача. Можно ли замостить доску 10×10 прямоугольниками 4×1?

Решение. Раскрасим доску в 4 цвета, как показано на картинке.

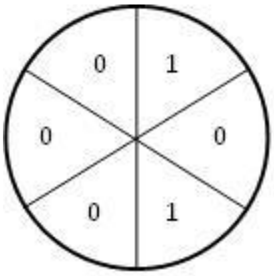
[*] Ребята, которые учатся у нас второй год, узнают эту задачу. Она предлагалась как дополнительная в одном из заданий прошлого учебного года.

Заметим, что при любом расположении прямоугольника 4×1, он будет покрывать ровно по одной клетке каждого цвета (этим и примечательна такая «диагональная» раскраска).

Значит, чтобы было возможно покрыть доску такими прямоугольниками, надо чтобы клеток всех цветов на ней было поровну (по 25). Но легко видеть, что, например, клеток синего цвета всего 24, значит такое замощение невозможно.

Метод раскраски можно применять не только к прямоугольным доскам.

Задача. Круг разбит на 6 равных секторов, в которых поставлены числа 0, 0, 1, 0, 1, 0. Разрешается одновременно прибавить по единице к числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать числа во всех секторах равными?

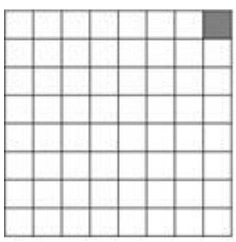


Решение. Раскрасим сектора в два цвета в «шахматном» порядке, то есть через один сектор. Заметим, что разность между суммами чисел в секторах разного цвета остается постоянной при этих операциях, поскольку прибавляется по единице к суммам в секторах как одного, так и другого цвета. Легко видеть, что эта разность исходно равна 2, а требуется, чтобы она стала равна 0. Это невозможно.

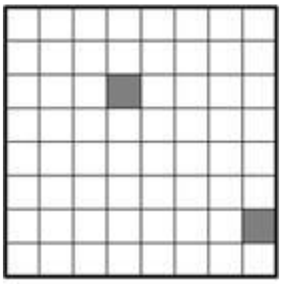
А теперь посмотрите главу «Подсчет узких мест» из книги «Принцип узких мест». К каким задачам можно применить метод раскраски?

Обязательные задачи

6.1. Можно ли изображенную на рисунке ниже доску замостить доминошками 2×1 (клетка в правом верхнем углу вырезана)?



6.2. Можно ли изображенную на рисунке ниже доску замостить доминошками 2×1 (вырезаны две клетки)?



6.3. В каждой клетке доски 5×5 клеток сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

6.4. На доске 8×8 для «морского боя» стоит двухпалубный корабль. Какое наименьшее число выстрелов необходимо, чтобы наверняка ранить его?

6.5. Круг разбит на 6 секторов. В секторах стоят 6 шашек, по одной в каждом секторе. За один ход разрешается передвинуть 2 шашки на один сектор каждую (в одинаковых или противоположных направлениях). Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

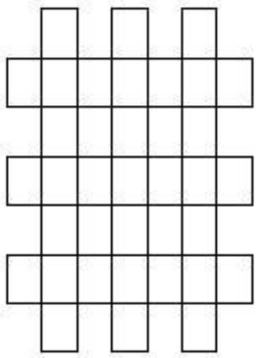
6.6. Замок имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной, – комната замка, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, проделана дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Дополнительные задачи

6.7. Возможно ли замостить прямоугольниками 3×1 доску 8×8 с вырезанной угловой клеткой?

6.8. Можно ли доску 10×10 разрезать на фигурки из 4 клеток в форме буквы Т?

6.9. На какое наименьшее число прямоугольников (не обязательно равных) можно разбить эту фигуру справа? (Разрезы можно производить только по линиям клеток.)



Срок отправки задания: 26 января.

Задание 7. Число Пи. Неравенство треугольника.

Наше очередное занятие посвящено сразу двум темам. Первая из них – число «пи». Наверняка вы слышали про это странное число:

$$\pi$$

Откуда же взялось это число, какой у него смысл и как его записать цифрами?

Есть такая теорема: пусть две произвольные окружности имеют длины соответственно C_1 и C_2, а диаметры d_1 и d_2 . Тогда $C_1 : d_1 = C_2 : d_2$. Другими словами, отношение длины окружности к её диаметру — постоянная величина. Эта величина и обозначается буквой π . Её значение приблизительно равно 3,14159265358979323846… Конечно, запомнить даже несколько первых цифр этого числа непросто, но для этого придуманы разные хитрости. Например, в стихотворении

> Это я знаю и помню прекрасно:
> Пи многие знаки мне лишни, напрасны.
> Доверимся знаньям громадным
> Тех, пи кто сосчитал, цифр армаду.

количество букв в каждом слове соответствует очередной цифре числа π. Так же устроено предложение «Вот и знаю я число, именуемое "пи". Молодец!»

Обозначение для числа π придумал английский математик Оутред (1574 – 1660), взяв первую букву от греческого слова *περιφερια* – окружность (отсюда наше: *периферия*). Из этой теоремы следует, что длину окружности можно вычислить по следующей замечательной формуле: $C = 2\pi R$, где R – радиус окружности. Можно доказать, что площадь круга, ограниченного окружностью радиуса R, равна πR^2.

Число π – иррациональное, его нельзя записать как дробь $\frac{m}{n}$, однако можно с достаточно хорошим приближением представить дробью $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

Таким образом, например, длина окружности радиуса 1 см приблизительно равна $\frac{44}{7} \approx 6{,}29$.

Значительная часть задач этого задания будет связаны с числом π и формулами длины окружности и площади круга.

Другие задачи будут опираться на *неравенство треугольника*: ***длина стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух других сторон***. Вы все знакомы с этим правилом: «срезая» дорогу по тропинке, вы пользуетесь им.

Из неравенства треугольника следует и другое соотношение: *длина стороны треугольника всегда больше разности двух других сторон*. Докажем это утверждение: пусть a , b и c – стороны треугольника. По неравенству треугольника $b < a + c$, откуда сразу следует, что $a > b - c$, что и требовалось доказать.

Разберём несколько примеров.

Пример 1. Стороны равнобедренного треугольника равны 1 и 3. Какая из сторон является основанием?

Решение. Сторона длины 3 основанием быть не может, это противоречило бы неравенству треугольника. Длина основания равна 1.

Пример 2. Может ли основание равнобедренного треугольника быть вдвое больше боковой стороны? Ответьте на этот вопрос самостоятельно.

Пример 3. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой и вдвое меньше третьей?

Решение. Обозначим меньшую сторону через x , тогда остальные стороны равны $2x$ и $4x$. Но $4x > x + 2x$, это противоречит неравенству треугольника.

Пример 4. Чему равен периметр треугольника со сторонами 1, 2 и 3?

Решение. Такого треугольника не существует: $3 = 1 + 2$, это противоречит неравенству треугольника.

Сформулируем общее правило: *если для трех точек плоскости A, B и C выполняется равенство AB + BC = AC, то точки A, B, C лежат на одной прямой и точка B лежит между точками A и C. Аналогично для разности: если AB – BC = AC, то точки A, B, C лежат на одной прямой и точка C лежит между точками A и B.*

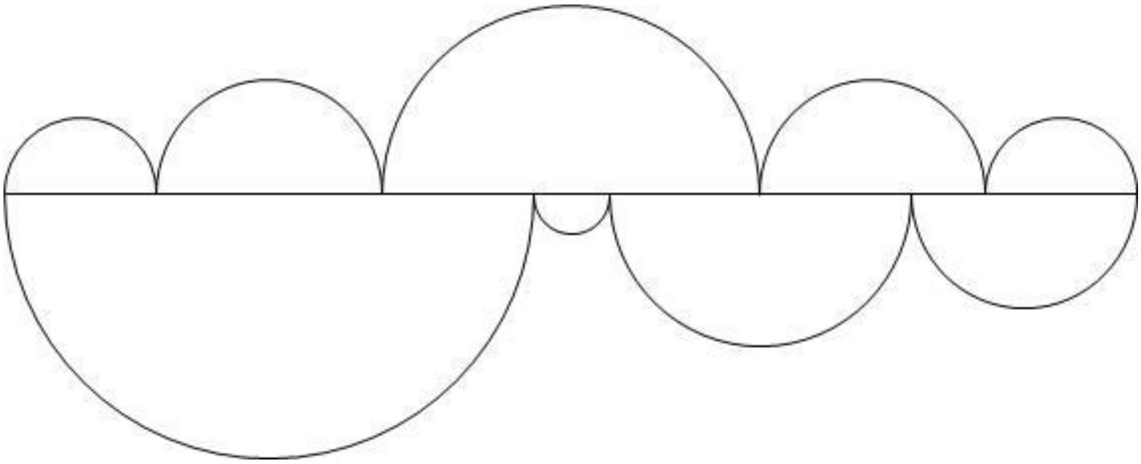
Кроме того, неравенство треугольника можно и обобщить: *длина стороны многоугольника всегда меньше суммы всех остальных его сторон.*

Это утверждение легко доказать, попробуйте сделать это самостоятельно.

Обязательные задачи

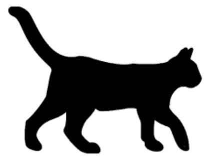
7.1. Радиус окружности увеличили на 3,5 см. На сколько увеличилась длина окружности? При вычислении можно полагать, что $\pi = \dfrac{22}{7}$.

7.2. На рисунке изображены полуокружности.

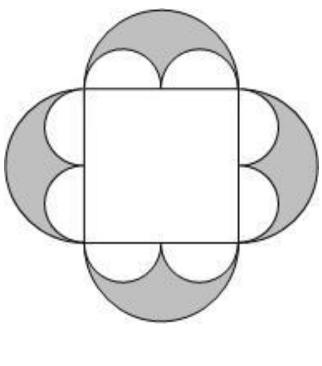


Какая из этих кривых имеет большую длину: та, которая находится в верхней полуплоскости, или так, которая лежит в нижней?

7.3. Земной шар обвязали по экватору верёвкой. Затем эту верёвку удлинили на метр и приподняли над экватором на колышках одинаковой высоты. Таким образом, между землёй и верёвкой образовалась щель. Сможет ли в эту щель пролезть кошка?



7.4. На каждой сторон квадрата со стороной 1 как на диаметре на внешнюю сторону построена полуокружность. Кроме того, на каждой половине стороны этого квадрата таким же образом построены полуокружности. Найдите периметр и площадь закрашенной на рисунке фигуры.



В ответе **не** заменяйте π его приближенным значением.

7.5. Длина стороны *AC* треугольника *ABC* равна 3,8, длина стороны *AB* равна 0,6. Известно, что длина стороны *BC* – целое число. Какова эта длина?

7.6. Два поселка *A* и *B* расположены **по разные стороны** от дороги, которая представляет собой прямую линию. Где нужно устроить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от неё до поселков *A* и *B* была наименьшей?

7.7. От Петербурга до Москвы 660 км, от Петербурга до деревни Лыково – 310 км, от Лыково до Клина – 200 км, от Клина до Москвы – 150 км. Каково расстояние от Лыково до Москвы?

Дополнительные задачи

7.8. Докажите, что длина любой стороны треугольника не превосходит его полупериметр.

7.9. Домики трёх поросят и волка расположены на одной окружности. Где нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех четырёх домиков была минимальной?

7.10. Два поселка *A* и *B* расположены **по одну сторону** от дороги, которая представляет собой прямую линию. Где нужно устроить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от неё до поселков *A* и *B* была наименьшей?

Срок отправки задания: 8 февраля.

Задание 8. Симметрия

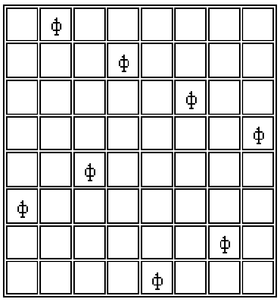
Название этого задания – подсказка к решению многих задач. Вперёд!

Обязательные задачи

Часть 1. *Разбиение на пары.*
<u>*Идея*</u>*: для того чтобы доказать, что чего-то четное количество, часто удобно разбить на пары.*

8.1. На шахматной доске стоят 11 шашек, расположенных симметрично относительно большой диагонали. Докажите, что есть шашка или шашки и на большой диагонали.

8.2. а) Петя смог расставить на шахматной доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга. Придумайте еще один способ это сделать.



б) Докажите, что число способов расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не били друг друга, четно.

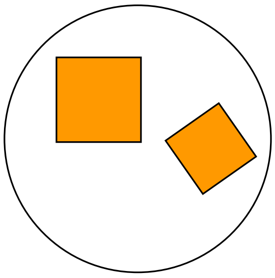
8.3. а) Решая числовой ребус *ДВА* + *ТРИ* = *ПЯТЬ*, Вася получил 177 возможных ответов. Докажите, что Вася ошибся.

б) Подумав, Вася нашел еще 178-е решение. Верно ли, что Вася нашел все решения ребуса?

Часть 2. *Геометрия*

8.4. Разрежьте квадрат на а) два равных шестиугольника; б) два равных пятиугольника.

8.5. На сковородке лежат два квадратных блина. Можно ли их рассечь одним прямолинейным разрезом на две равные части каждый?



Часть 3. *Игры*

8.6. На каждом из двух столов лежит по монете достоинством 5 рублей. Играют двое. Каждый игрок за один ход может взять любую из монет, разменять ее и положить на тот стол, с которого взял. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре*? (Монеты берутся из набора 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек и 1 рубль).

8.7. Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выигрывает при правильной игре?

* Правильная игра – это такая последовательность действий игрока, которая обязательно приведет его к победе (если это вообще возможно). Ваша задача – описать эту последовательность действий.

Дополнительные задачи

8.8. На шахматной доске по очереди отмечаются клетки так, что множество отмеченных клеток все время образует симметричную фигуру (фигуру, имеющую ось симметрии или центр симметрии). Можете ли вы таким образом отметить 26 клеток?

8.9. В круге отметили точку. Можно ли так разрезать этот круг на три части, чтобы из них можно было бы сложить новый круг, у которого отмеченная точка стояла бы в центре?

8.10. Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

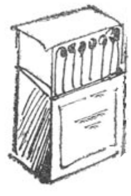
8.11. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с центральной секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

Срок отправки задания: 28 февраля.

Задание 9. Еще немного геометрии

Это задание состоит из разных задач с геометрическим мотивом. Такие задачи развивают плоское и пространственное воображение, формируют геометрическую интуицию. Но здесь нужна не только интуиция, где-то вам придется применить какие-то навыки – вспомнить неравенство треугольника и сумму углов треугольника, где-то понадобится ввести переменную, доказывать равенство фигур.

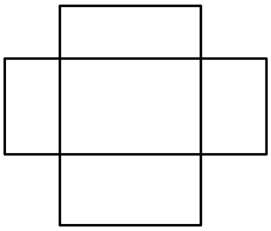
Обязательные задачи



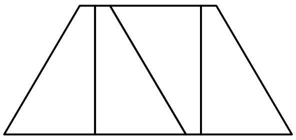
9.1. Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 7 раз короче, чем на его родине. Сможете ли Вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечный коробок Гулливера?

9.2. Разрежьте треугольник на два пятиугольника.

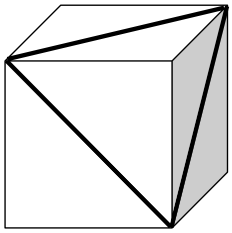
9.3. Два прямоугольника, пересекаясь, образуют пять прямоугольников. Оказалось, что площади всех пяти прямоугольников одинаковы. Докажите, что все прямоугольники равны.



9.4. Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.



9.5. На трех гранях куба провели диагонали так, что получился треугольник. Найдите углы этого треугольника.



9.6. Разрежьте квадрат на три части, из которых можно сложить а) треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) треугольник с тремя острыми углами и тремя различными сторонами.

9.7. Из картона сделан равнобедренный прямоугольный треугольник. Можно ли от него последовательно отрезать прямолинейными разрезами а) шесть; б) восемь равных кусочков?

Дополнительные задачи

9.8. Разрежьте треугольник на два пятиугольника, один из которых выпуклый, а другой – невыпуклый.

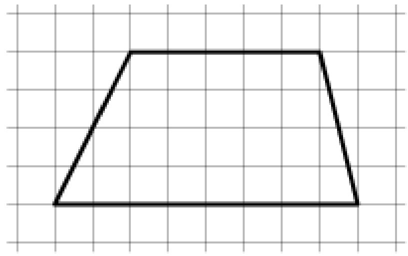
9.9. Прямая раскрашена в два цвета, то есть у каждой точки прямой есть цвет. Докажите, что на ней найдутся три точки A, B и C, окрашенные в один цвет, такие, что точка B является серединой отрезка AC.

9.10. В Волшебной Стране свои волшебные законы природы, один из которых гласит: «Ковёр-самолёт будет летать только тогда, когда он имеет прямоугольную форму». У Ивана-царевича был ковёр-самолёт размером 9×12. Как-то раз Змей Горыныч подкрался и отрезал от этого ковра маленький коврик размером 1×8. Иван-царевич очень расстроился и хотел было отрезать ещё кусочек 1×4, чтобы получился прямо-

угольник 8×12, но Василиса Премудрая предложила поступить по-другому. Она разрезала ковёр на три части, из которых волшебными нитками сшила квадратный ковёр-самолёт размером 10×10. Сможете ли вы догадаться, как Василиса Премудрая переделала испорченный ковёр?

9.11. У Джузеппе есть лист фанеры размером 22×15. Джузеппе хочет из него вырезать как можно больше прямоугольных заготовок размером 3×5. Как это сделать?

9.12. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две части, из которых можно сложить треугольник.



Срок отправки задания: 20 марта.

Задание 10. Примеры и конструкции

В большинстве задач этого занятия требуется построить ту или иную конструкцию, удовлетворяющую некоторым свойствам. Для построения важно понять, где узкое место, из-за которого пример построить затруднительно, и постараться его обойти. Для тренировки можно (и нужно!) порешать задачи из главы «Примеры и конструкции» книжки «Математический кружок».

Обязательные задачи

10.1. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 разбить на пары (четное, нечетное) так, чтобы во всех парах, кроме одной, нечетное число было больше четного?

10.2. 20 детей разбили на пары мальчик-девочка, так что в каждой паре мальчик оказался выше девочки. После этого их разбили на пары мальчик-девочка по-другому. Может ли теперь оказаться

а) что в 9 парах из 10 девочка выше мальчика?

б) что в каждой паре девочка выше мальчика?

10.3. На бал пришли 10 юношей и 10 девушек, было 10 танцев и каждый раз танцевали все. Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

10.4. Площадь прямоугольника равна $1 см^2$. Может ли его периметр быть больше 1км?

10.5. Раз в месяц директор фирмы предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

10.6. Придумайте и нарисуйте схему движений между 9 планетами Солнечной системы, такую, чтобы соблюдались следующие три условия:

1) добраться с Земли до Меркурия можно не менее, чем с тремя пересадками;

2) с Земли можно улететь в трёх направлениях (на три другие планеты), и с Меркурия можно улететь в трёх направлениях;

3) а с Сатурна можно улететь в шести направлениях.

10.7. В царстве 20 городов, которые как-то соединены дорогами, причем из любого города можно проехать в любой другой. Царь пообещал разделить царство на два, так чтобы в каждой половине было хотя бы 5 городов. А еще он хочет, чтобы между городами каждого из «полцарств» можно было перемещаться, не заезжая в города другого «полцарства». Всегда ли он сможет так поделить царство?

10.8. Между городами области проведено 120 дорог. Из любого города в любой другой можно проехать. Все дороги надо распределить между 3 бригадами ремонтников так, чтобы каждая бригада ремонтировала не менее 25 дорог и могла передвигаться по своим дорогам, не пользуясь чужими. При любой ли схеме дорог их можно так распределить между бригадами?

Дополнительные задачи

10.9. Можно ли написать несколько целых положительных чисел таких, чтобы их сумма была в 5 раз больше их произведения?

10.10. Шестиклассник разрезал квадрат на прямоугольники периметра 60, а семиклассник разрезал такой же квадрат на прямоугольники периметра 70. Могло ли у семиклассника получиться больше прямоугольников?

10.11. Андрей, Костя и Света участвовали в нескольких шахматных турнирах. Могло ли случиться так, что Андрей занял место выше Кости более чем в половине турниров, Костя занял место выше Светы более чем в половине турниров, а Света заняла место выше Андрей тоже более чем в половине турниров?

10.12. Кощей Бессмертный похитил у царя трёх дочерей. Отправился Иван-царевич их выручать. Приходит он к Кощею, а тот ему и говорит: «Завтра поутру увидишь пять заколдованных девушек. Три из них – царевы дочери, а ещё две – мои. Для тебя они будут неотличимы, а сами друг дружку различать смогут. Я подойду к одной из них и стану у неё спрашивать про каждую из пятерых: «Это царевна?» Она может отвечать и правду, и неправду, но ей дозволено назвать царевнами ровно двоих (себя тоже можно называть). Потом я так же опрошу каждую из остальных девушек, и они тоже должны будут назвать царевнами ровно двоих. Если после этого угадаешь, кто из них и вправду царевны, отпущу тебя восвояси невредимым. А если ещё и догадаешься, которая царевна старшая, которая средняя, а которая младшая, то и их забирай с собой».

Иван может передать царевнам записку, чтобы научить их, кого назвать царевнами. Может ли он независимо от ответов Кощеевых дочерей:

а) вернуться живым; б) увезти царевен с собой?

Срок отправки задания: 10 апреля.

Задание 11. Графы

Для работы над последними двумя заданиями этого учебного года вам понадобится книжка «Графы», которую мы вам прислали. Она совсем небольшая. Прочтите определения и изучите примеры из этой книжки. Только после этого стоит приступать к решению задач. Задач в задании много, но они несложные.

Для вашего удобства запишем некоторые определения и здесь:

Определения. Будем называть *графом* множество точек (*вершин*), некоторые из которых соединены между собой линиями (*рёб-*

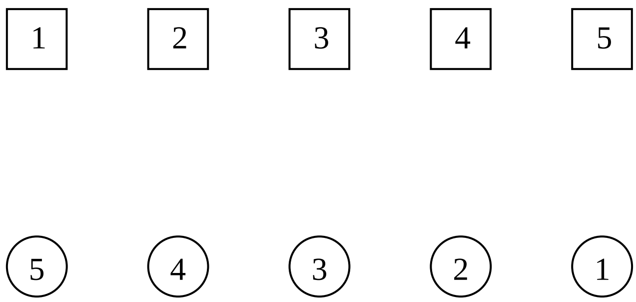
рами). Граф называется *связным*, если от любой его вершины можно по рёбрам добраться до любой другой.

Два графа называются *равными*, если их вершины можно пронумеровать так, что одинаково пронумерованные вершины будут либо в обоих графах соединены, либо в обоих графах не соединены.

Определение. Количество рёбер, выходящих из вершины, называется *степенью* этой вершины.

Обязательные задачи

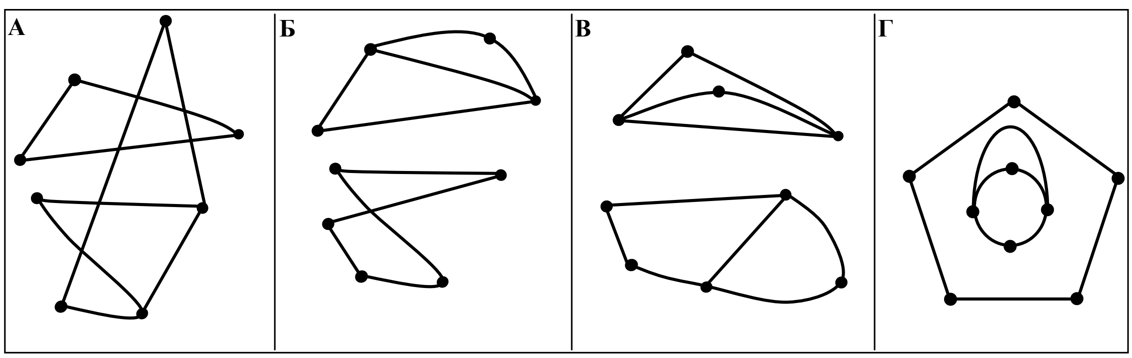
11.1. На рисунке квадратиками обозначены дома Единицына, Двойкина, Тройкина, Четвёркина и Пятёркина. Кружочками обозначены их колодцы. Могут ли эти граждане проложить тропинки к своим колодцам так, чтобы тропинки не пересекались?



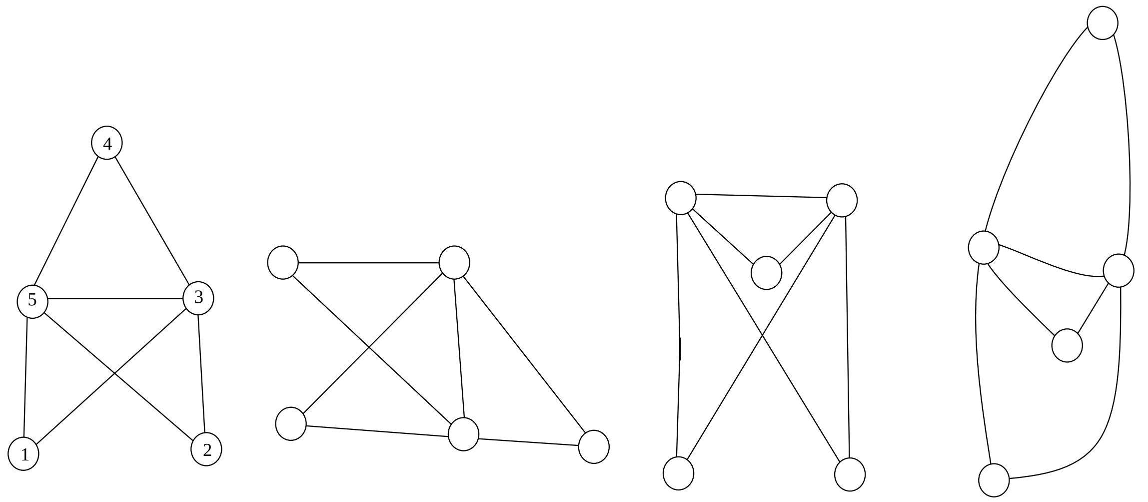
11.2. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля–Меркурий, Плутон–Венера, Земля–Плутон, Плутон–Меркурий, Меркурий–Венера, Уран–Нептун, Нептун–Сатурн, Сатурн–Юпитер, Юпитер–Марс и Марс–Уран.

а) Можно ли добраться с Земли до Марса?

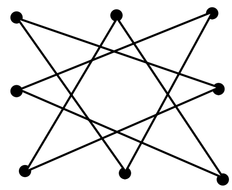
б) Есть ли среди приведенных ниже схем те, которые могут отражать схему движений между планетами? Если есть, то какие?



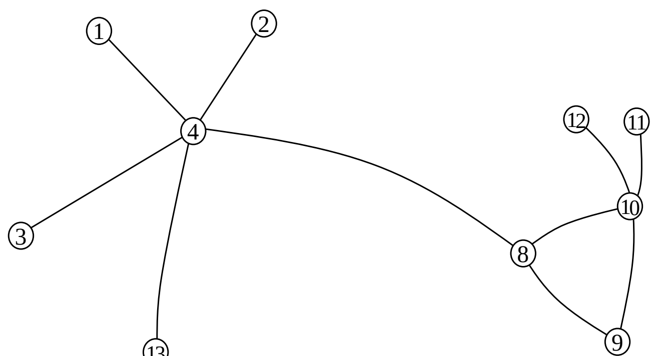
11.3. Ниже приведены четыре разных изображения одного и того же графа. Вершины одного из них пронумерованы. Пронумеруйте соответствующие вершины оставшихся графов, так, чтобы убедиться, что графы действительно равны.



11.4. Перерисуйте следующий граф так, чтобы его ребра не пересекались:



11.5. На рисунке изображен граф с 14-ю вершинами. Из вершины, обозначенной цифрой 4, выходит пять линий (рёбер), поэтому её степень равна 5. Найдите степени всех остальных вершин.



11.6. Сытый марсианский кот Васька поймал 6 марсианских треххвостых мышек и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать?

11.7. В другой раз Васька поймал 15 марсианских мышек, и при этом оказалось, что у пяти из них по 3 хвоста, у двух – по 5 хвостов, у трех – по 7 хвостов, у четырех – по 4, а у остальных – по два хвоста. Сколько теперь узелков придется завязать Ваське? Зависит ли это от способа – как именно он будет связывать? Нарисуйте какую-нибудь схему, как связать мышек так, чтобы никакие две мышки не оказались связаны друг с другом дважды.

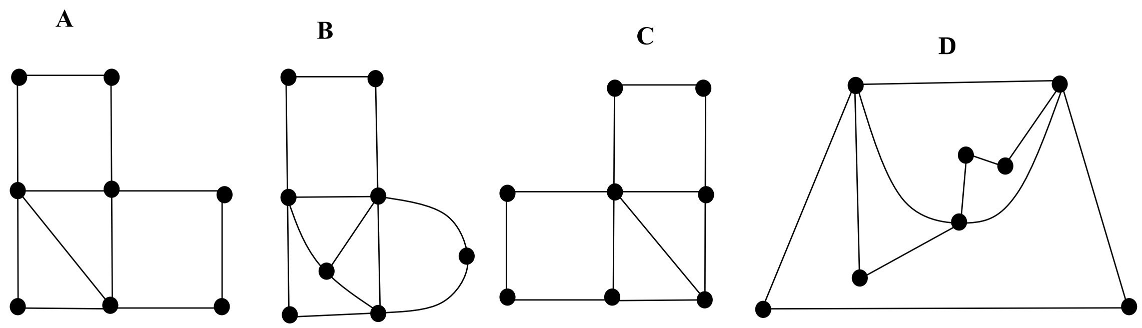
11.8. Может ли Васька связать хвостами 15 треххвостых марсианских мышек так, чтобы свободных хвостов не осталось?

11.9. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

11.10. В посёлке Подикаразберись 9 домов. Из каждого дома тянется четыре шланга к четырем другим домам и каждый из этих шлангов имеет длину 178 метров 25 сантиметров. Найдите общую длину шлангов в посёлке Подикаразберись.

Дополнительные задачи

11.11. Есть ли среди следующих графов равные? Если да, то какие?



11.12. Можно ли, сделав несколько ходов конями (по шахматным правилам), из исходного положения, изображенного на рис. 1, получить расположение, изображенное на рис. 2?

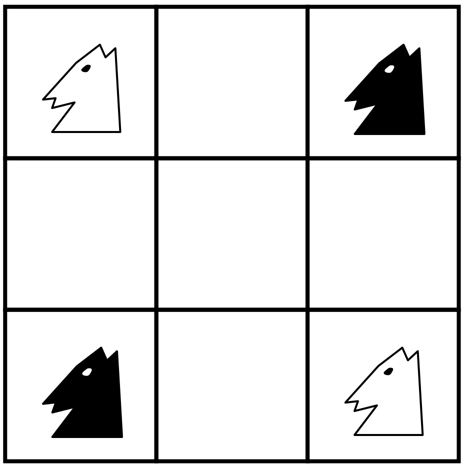


Рис. 1

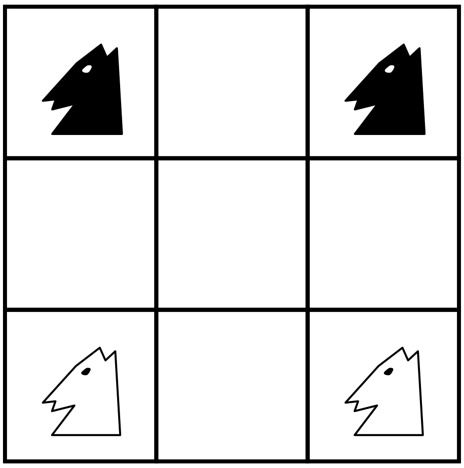


Рис. 2

11.13. Существует ли 8-вершинный граф (предполагается, что каждые две вершины соединены не более чем одним ребром), степени вершин которого равны соответственно:

а) 8, 6, 6, 5, 3, 2, 1, 1?

б) 7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 1?

в) 7, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1?

г) 7, 6, 4, 3, 4, 4, 1, 2?

Срок отправки задания: 30 апреля.

Задание 12. Подсчет ребер

Для решения задач этого задания вам будет необходима «Лемма о рукопожатиях» из Занятия 2 книжки «Графы», которая формулируется так: *сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер.* При помощи этой леммы можно посчитать количество ребер в графе, зная только степени его вершин. Также вам понадобится следствие из этой леммы. Постарайтесь разобраться с доказательствами!

Обязательные задачи

12.1. В городе Маленьком 15 телефонов. Некоторые телефоны соединены проводами (каждый провод соединяет ровно два телефона). В город пробрался хулиган и разрезал каждый провод пополам. И теперь от 5 телефонов отходит

по 6 половинок проводов, а от остальных 10 телефонов – по 3 половинки. Сколько всего проводов разрезал хулиган?

12.2. В графе степени вершин равны 6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 4. Сколько в нем ребер?

12.3. Сева нарисовал 10 точек, некоторые из которых соединил отрезками. После этого он спрятал рисунок в чемодан, чемодан закрыл на ключ, а ключ проглотил. В ответ на это Наташа заслала в его чемодан разведывательного таракана, который сообщил, что из точек выходит соответственно 5, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1 отрезка. Сколько отрезков нарисовал Сева?

12.4. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

12.5. В архипелаге каждый остров соединен мостом ровно с семью другими. Сколько в этом архипелаге островов, если мостов – 84?

12.6. В деревне Пятнашкино 15 домов. Электрик решил соединить проводами каждый дом ровно с девятью другими. Сможет ли он это сделать?

12.7. Докажите, что в любом графе количество вершин нечетной степени чётно.

12.8. Четыре девочки играли друг с другом в шахматы. Таня сыграла 20 партий, Аня – 10, Маша – 17, Наташа – 13. Все девочки набрали поровну очков. По сколько? (За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью – 1/2 очка, за поражение – 0 очков.)

12.9. В компании из 7 человек каждый пожал руку каждому. Сколько было сделано рукопожатий? А если бы в компании было 100 человек?

12.10. В городе отличников есть несколько площадей. От каждой площади отходит ровно 5 улиц. Каждая улица, начинаясь от некоторой площади, ведет до другой площади и там заканчивается. Докажите, что число площадей чётно, а число улиц делится на 5.

Дополнительные задачи

12.11. Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими?

12.12. Архипелаг ГудЛак, расположенный вблизи континента

Австрика, состоит из 17 островов. С каждого из островов ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из островов соединён мостом с Австрикой?

12.13. В классе 20 человек. Из них все, кроме Пети, дружат ровно с 5 одноклассниками. Может ли Петя ни с кем не дружить?

12.14. В шахматном турнире участвовали 15 человек. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно один матч. Среди участников было ровно 8 мальчиков. Сколько побед они в сумме одержали, если неизвестно как они сыграли друг с другом, но известно, что они выиграли ровно половину всех матчей против девочек (ничьих в партиях не было)?

Срок отправки задания: 20 мая.