

# **Информационная лаборатория «Моделирование процессов» для учащихся школ-участниц Сети Атомклассов проекта «Школа Росатома»**

## **Построение математической модели динамики популяций**

### **Введение**

Экосистема представляет собой сложную совокупность видов, взаимодействующих друг с другом, перемещающихся в пространстве, изменяющих свою численность. На все популяции, существующие в экосистеме, дополнительно воздействуют различные абиотические и антропогенные факторы. Численность популяции зависит от погоды, химического состава среды и степени ее загрязнения. Непрерывно усиливающаяся хозяйственная деятельность человека приводит постепенно к необратимым изменениям многих природных систем. Их восстановление и рациональное использование является на сегодняшний день одной из важнейших задач, поскольку дальнейшее благополучное существование и развитие общества возможно только в гармонии с природой.

Изучение закономерностей динамики численности популяций необходимо для создания научных основ рационального использования полезных животных и борьбы с вредными насекомыми. При этом используются математические методы, в частности, моделирование. Математическая модель позволяет выявить наиболее важные факторы, влияющие на динамику той или иной популяции, наметить направление исследований и составить план необходимых наблюдений. Преимущества математического анализа очевидны: математическое моделирование не только помогает строго формализовать знания об объекте, но иногда дать количественное описание процесса, предсказать его ход и эффективность, дать рекомендации по оптимизации управления этим процессом. Это особенно важно для биологических процессов, имеющих прикладное и промышленное значение – биотехнологических систем, агробиоценозов, эксплуатируемых природных экосистем, продуктивность которых определяется закономерностями роста популяций живых организмов, представляющих собой «продукт» этих биологических систем.

Частным случаем математического моделирования является - имитационное компьютерное моделирование, которое позволяет анализировать особенности взаимодействий популяции и факторов окружающей среды, рассматривать различные сценарии изменения этих факторов, давать прогнозы динамики численности популяций. Поэтому

вопрос разработки адекватного математического аппарата для изучения динамики популяций является актуальным.

### **Модель неограниченного роста численности популяции (модель Мальтуса)**

Модель предложена Мальтусом в 1798 г. в его классическом труде «О росте народонаселения». В ее основу положена задача о динамике численности популяции, которая является классической моделью неограниченного роста - геометрическая прогрессия в дискретном представлении,

$$X_{n+1} = r_1 X_n$$

Но бесконечный рост популяции невозможен ввиду ограниченности ресурсов, и при достижении критической массы неизбежно наступит голод. Любые популяции существуют во взаимодействии с окружением. В популяционной динамике принято классифицировать взаимодействия по их результатам. Наиболее распространенными и хорошо изученными являются взаимодействия конкуренции, когда численность каждого из видов в присутствии другого растет с меньшей скоростью. Моделирование динамики популяции становится более сложной задачей, если попытаться учесть реальные взаимоотношения между видами. Рассмотрим модель динамики Лотка-Вольтерра системы «Хищник-жертва».

### **Уравнение Лотка-Вольтерра как математическая модель динамики системы «Хищник-жертва»**

В данной модели рассматривается взаимодействие двух популяций - хищника и жертвы. Численность популяции жертвы  $X_1$  будет изменяться во времени (зависая также от численности популяции хищника  $Y_2$ ) по такому уравнению:

$$X_{n+1} = X_n + r_1 X_n - p_1 X_n Y_n, \text{ где}$$

$X_n$  - численность популяции жертвы в текущем цикле;

$X_{n+1}$  - численность популяции жертвы в следующем цикле;

$Y_n$  - численность популяции хищника в текущем цикле;

$r_1$ - коэффициент рождаемости жертвы;

$p_1$ - коэффициент смертности жертвы.

Таким образом, увеличение численности жертвы в единицу времени происходит за счет рождения новых особей, а убыль - за счет съедения хищниками.

Прирост популяции хищника описывается таким уравнением:

$$Y_{n+1} = Y_n + p_2 X_n Y_n - d_2 Y_n, \text{ где}$$

$Y_n$  - численность популяции хищника в текущем цикле;

$X_n$  - численность популяции жертвы в текущем цикле;

$Y_{n+1}$  - численность популяции хищника в следующем цикле;

$d_2$  - смертность хищника;

$p_2$  - коэффициент рождаемости хищника.

Рост популяции хищника в единицу времени пропорционален качеству питания, а убыль происходит за счет естественной смертности.

### Постановка задачи

На территории современной Монголии в конце мелового периода, около 75—71 млн. лет назад жили хищные **велоцирапторы** и травоядные **протоцератопсы**. Ученые полагают, что велоцирапторы активно охотились на протоцератопсов.



Сегодня на данной территории раскинулась пустыня Гоби, во время мелового периода место обитания данных видов динозавров было покрыто множеством рек, озер и лесов, которые были подвержены периодам засухи. По истечении столь большого количества веков, сложно однозначно определить взаимодействие популяций данных видов, но основываясь на палеонтологических показаниях и ряде допущений, мы построим модель динамики системы «велоцираптор-протоцератопс» на небольшой изолированной территории.

Численности установим на исходных значениях **600 особей** для велоцирапторов и **700 особей** для протоцератопсов. Исследовать изменчивость популяций будем за **200 циклов** (лет). Для описания модели возьмем следующие значения коэффициентов:

$r_1$	$p_1$	$d_2$	$p_2$
0,1	0,00024	0,08	0,00014

Необходимо построить информационную модель «хищник-жертва» с использованием любого доступного вам инструментария (языки программирования, электронные таблицы, программы математического моделирования и др.). Рассчитанную математическую модель необходимо представить в виде графика, диаграммы, инфографики или любым другим способом визуальной передачи информации. Разработанный программный продукт необходимо направить до **15:00** на электронную почту [kudryavcevatatyana69@mail.ru](mailto:kudryavcevatatyana69@mail.ru)

Защиту продукта с демонстрацией его работы и описанием поведения модели записать на видео и разместить в группе VK до 15:00: <https://vk.com/club222481962>

**Дополнительный вопрос:** при каких исходных значениях численности велоцирапторов и протоцератопсов модель будет вести себя устойчиво (колебания на графике отсутствуют или незначительны)? Значения рассчитать или подобрать.